Risk aversion

1 Exercice 1. Modèle dual

Il existe une approche dite duale pour modéliser le comportement en environnement risqué. Pour le comprendre imaginons une loterie finie $\widetilde{w}$. Le paiement peut prendre un nombre fini de valeurs $w_1 < w_2 ... < w_n$ avec probabilités $p_1, p_2 ... p_n$ (avec $\sum p_k = 1$).

Confrontons notre décideur à une loterie certaine qui donne β avec probabilité 1. Clairement, si $\beta = w_1$, notre décideur préfère jouer à $\widetilde{w}$, si $\beta = w_n$, il préfère jouer à la loterie β. Il existe donc un seuil $e(\widetilde{w})$ (propre au décideur) tel que si $\beta < e(\widetilde{w})$, alors *le* décideur choisit w, si $\beta > e(\widetilde{w})$, il préfère la loterie β. $e(\widetilde{w})$ est appelé équivalent certain de la loterie w.

1.1 1. Quel est l'équivalent certain pour un individu "infiniment risquophobe"

Un décideur infiniment risquophobe est un individu qui ne prend jamais le risque "de perdre" : $e(\widetilde{w}) = w_1$. Il ne joue à la loterie w que s'il est sûr de gagner plus.

Un individu infiniment risquophobe est un individu aveugle aux gains potentiels supérieurs à w_1.

Une attitude moins extrêmiste consisterait à imaginer que notre décideur tienne compte du fait que (avec probabilité $1 - F_1 = p_2 + ... p_n$) la loterie puisse lui donner plus que w_2.

1.2 2. Une autre formule pour calculer l'espérance

On a

$$E(\widetilde{w}) = \sum_{k=1}^{n} p_k w_k$$

Posons : $F_i = \sum_{k=1}^{i} p_k,$, $\overline{F}_i = 1 - F_i$, de sorte que $p_k = \overline{F}_{k-1} - \overline{F}_k$ avec $\overline{F}_0 = 1$ et $\overline{F}_n = 0$

$$\begin{aligned} E(\widetilde{w}) &= \sum_{k=1}^{n} (\overline{F}_{k-1} - \overline{F}_k) w_k = \sum_{k=0}^{n-1} \overline{F}_k w_{k+1} - \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k w_k \\ &= w_1 + \sum_{k=1}^{n} (1 - F_k)(w_{k+1} - w_k) \end{aligned}$$

1.3 3. Une formule pour l'équivalent certain

On se donne une fonction ϕ croissante. telle que $\phi(1) = 1$, $\phi(0) = 0$.

On pose alors :

$$e(\widetilde{w}) = w_1 + \sum_{k=1}^{n} \phi((1 - F_k))(w_{k+1} - w_k)$$

1.4 4. Quelle est la fonction ϕ associée à un individu infiniment risquophobe

$\phi(1) = 1$, et $x < 1 \Longrightarrow \phi(x) = 0$

1.5 5. Comment caractériser les fonctions ϕ correspondant à de l'aversion au risque?

$$\forall w, \overline{F}, \quad \sum_{k=1}^{n} \phi(\overline{F}_k)(w_{k+1} - w_k) \leq \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k (w_{k+1} - w_k)$$

$$\forall x, \phi(x) \leq x$$

2 Exercice 2 : Montrer :

$$u'(z) = k \exp\left[-\int_a^z I_u(w) dw \right]$$

3 Exercice 3

Un "Manageur" a le choix entre deux projets. Le premier est relativement risqué. Il est tel que le cours $\widetilde{S}$ de l'action de l'entreprise suit la loi suivante :

$$\begin{aligned} &\widetilde{S} = S_0 + H \text{ avec probabilité } 1/2 \\ &\widetilde{S} = S_0 - H \text{ avec probabilité } 1/2 \end{aligned}$$

Le second l'est moins

$$\begin{aligned} &\widetilde{S} = S_0 + h \text{ avec probabilité } 1/2 \\ &\widetilde{S} = S_0 - h \text{ avec probabilité } 1/2 \\ &h < H \end{aligned}$$

Notre manageur est "rémunéré" en options d'achat de strike S_0. (il a le droit d'acheter l'action au prix S_0).

3.1 Montrer que bien qu'il soit risquophobe notre manageur choisit de prendre le risque.

3.2 Exercice 4 Prudence

On considère un individu qui vit sur deux périodes (activité/retraite par exemple). Dans la première période il a un revenu w_0, dont il peut épargner une partie. s Dans la second période il a un revenu certain w_1. complété par le produit de son épargne Rs Son utilité intertemporelle s'écrit :

$$u_0(w_0 - s) + u_1(w_1 + Rs)$$

Où u_0 et u_1 sont des fonction d'utilité concave et croissantes.

3.3 Ecrire la relation qui définit l'épargne optimale

$$u_0'(w_0 - s^*) = Ru_1'(w_1 + Rs^*)$$

Que se passe-t-il si on lui rajoute un risque (pur) en seconde période? On dit que le décideur est prudent si son épargne augmente!

3.4 Ecrire la condition qui grantit que l'épargne augmente avec le risque

$$Arg \max \left[u_0(w_0 - s) + Eu_1(w_1 + Rs + \widetilde{x}) \right] \geq s^*$$

posons $\phi(s) = u_0(w_0 - s) + Eu_1(w_1 + Rs + \widetilde{x})$, on doit donc avoir $\phi'(s^*) \geq 0$

3.5 En déduire une condition sur la convexité de u'.