Modèles de la finance
Contrôle écrit
Octobre 2009
2 h tous documents et calculttes recommandés

1. Obligations, marché de taux

Univers déterministe en temps continu

On considère le modèle en temps continu. Dans ce cadre on pose $q(t,T)$ le prix, à la date t de l'obligation zero-coupon d'échéance T. Dans ces conditions on définit, à la date t, le taux zero coupon d'échéance T, c'est-à-dire de maturité $T-t$, $R_{t,T}$,par

$$q(t,T) = \exp(-(R_{t,T}.(T-t))$$

On note $r(t)$le taux par unité de temps instantané à la date t (1 euro placé à t rapporte $1+r(t)dt$ euros à la date $t+dt$).

On suppose qu'à chaque date la dynamique future de $r(t)$est connue .

1. Ecrire la condition d'arbitrage qui permet d'exprimer $R_{t,T}$ en fonction de $r(s)$ $s \in [t,T]$.

A la date t on définit l'obligation ZC forward t_1, t_2: obligation achetée en t_1 qui rapporte 1euro en t_2.

2. Exprimer son prix $q_t^f(t_1, t_2)$ en fonction de $q(t,t_1)$ et $q(t,t_2)$.

3. Calculer le taux forward t_1, t_2 en fonction des données.

2. Petite question

On considère une obligation in fine sur 3 ans de taux nominal 5% et de valeur faciale 100

1. Quels sont les cash flows associés?

Sur le marché existent 3 obligations : une obligation zero coupon à un an qui cote $0,95$ une obligation zero coupon à trois ans qui cote $0,69$ et une obligation à deux ans in fine de taux nominal 4% de facial 100 qui cote 100.

2. Quelle est la courbe des taux?

3. Quelle est la cote théorique de l'obligation à trois ans.

3. Option américaine

On considère un modèle discret à 4 dates : $t = 0,1,2,3$

A chaque date $t = 0,1,2$ est disponible une obligation (sans risque) Z-C de maturité 1.Il n'y a pas de risque de taux : le prix de ces Z-C reste constant égal à $\frac{1}{1+r}$, où r est le taux d'interêt par unité de temps.

A chaque date est aussi disponible une action dont le cours est noté S_t. S_t suit un processus binomial

$$S_{t+1} = \left| \begin{array}{c} u.S_t \\ \text{ou} \\ d.S_t \end{array} \right.$$

avec $u > d$.

On note $(m_1, ..., m_t) \in \{u,d\} \times ... \times \{u,d\} = \{u,d\}^t$ un état de la "nature" à la date t: $m_k = u$ signifie que le cours de l'action a été multiplié par u entre la date $k-1$et k.

1. Combien y-a-t-il d'états de la nature à la date t?

On se propose de calculer l'évolution du prix d'une option américaine. Une option d'achat américaine d'échéance T(ici $T = 3$) donne le droit d'acheter l'action au prix K, à n'importe quelle date $t \leq T$. *La différence avec une option européenne tient au fait que l'on peut l'exercer avant T.*

2. Montrer que l'absence d'opportunité d'arbitrage entre t et $t+1$implique qu'il existe q_u et q_d strictement positifs tels que :

$$\begin{cases} 1 = uq_u. + dq_d \\ 1 = (1+r)q_u + (1+r)q_d \end{cases}$$

Pour les applications numériques de la suite on prend $d = \frac{1}{u} = 0,8$.et donc $u = 1,25$. $r = 0,1$. et $K = S_0$.

3. Donner les expressions et les valeurs de q_u et q_d.

On se place à la date 2 dans l'état $m^{(2)} = (u, u)$,le cours de l'action vaut $u^2 S_0$.

4. Calculer le prix de l'option $C_a(u, u)$ dans cet état de la nature si on ne l'exerce pas à la date 2.

Si on l'exerce à la date2 dans l'état (u, u) on encaisse immédiatement $\left(u^2 - 1\right) S_0$,si on ne l'exerce pas la valeur de son portefeuille est $C_a(u^2 S_0, S_0)$.que l'on peut liquider immédiatement.

5. Exerce-t-on l'option dans l'état (u, u)?

6. Calculer de même le prix de l'option (non exercée) à la date 2 dans les états $m^{(2)} = (u, d)$, (d, u), (d, t). A-t-on intérêt à l'exercer (et encaisser $S_2(m^{(2)}) - S_0$) ou non dans chacun de ces états.

7. Conclure qu'un raisonnement d'arbitrage simple implique que la valeur de l'option dans chacun des états de la nature de la date 2 est $P_2(m^{(2)}) = \max(S_2(m^{(2)}) - S_0, C_a(m^{(2)}))$.

Considérer alors de même les états $m^{(1)} = (u)$ ou (d) de la date 1

8. Calculer le prix de l'option non exercée en fonction des $P_2(m^{(2)})$ dans chacun des deux états de la nature

9. Faut-il l'exercer?

10 En déduire le prix de l'option à la date 0

Ecole Centrale Marseille
3A MAF /GPF Novembre 2010
Modèles de la finance
Dominique Henriet
Tous documents autorisés

rate (or price) curve

Foreword

This problem intends to model the shape of the rate curve in presence of risk. We are in a discrete world $t = 0, 1, ...t, ...$

At each date t there exists (on the market) all the zero coupon bonds : for all t and τ, there exists, at date t, the zero-coupon bond with maturity τ (that pays 1 euro at date $t + \tau$).

Between date t and $t + 1$, a random schock can happen. So that, at date t the history of past schocks is described by a $t-$vector $e_t = (\delta_1, \delta_2, ...\delta_t)$ where δ_i is equal to 0 (no schock) or 1 (schock).

- Assumption : we will assume that the price of the zero-coupon bonds only depend on the number of past schocks and not on the chronology of these schocks. If n is the number of schocks till t, we say that the state of nature at date t is n.

Hence the price, at date t, of the zero coupon of maturity τ writes $q(t, \tau, n)$, where n is the number of schocks between date 0 and date t. **WARNING contrarily to the course, τ is a maturity and not the date of payment (which is hence $t + \tau$).**

Forward contracts

Q1 Recall the definition of the forward zero-coupon whose characteristics are the following : date of trading t, delivery date $t + 1$, maturity τ.

We note $f_1(t, \tau, n)$ the price (defined at date t but payable at date $t + 1$) of such a forward contract.

Q2 Show by an arbitrage free reasonning, (or by applying the main result of the course) that :

$$f_1(t, \tau, n) = \frac{q(t, \tau + 1, n)}{q(t, 1, n)}$$

The 1-forward price curve at date t, in the state n, is the curve $\tau \to f_1(t, \tau, n)$

Dynamics

We will assume that the dynamics of the prices q is defined in the following way.

Suppose that the state of nature at date t is n. At date $t+1$ the state can hence be either n (no schock between t and $t + 1$), or $n + 1$.

- Assumption :

$$\begin{aligned} q(t + 1, \tau, n) &= \frac{q(t, \tau + 1, n)}{q(t, 1, n)} h_0(\tau) \\ q(t + 1, \tau, n + 1) &= \frac{q(t, \tau + 1, n)}{q(t, 1, n)} h_1(\tau) \end{aligned}$$

That is : the price of the zero coupon at date $t + 1$ is equal to the price of the forward multiplied by a factor that depends only on the maturity and the schock between t and $t + 1$.We assume $h_0(\tau) \geq h_1(\tau)$.

Q3 What are the values of $h_0(0)$ and $h_1(0)$?

We consider two investment strategies at date t in the state n :

- The first one is to invest one euro on the zero coupon of maturity $\tau + 1$, and re-sell it at date $t + 1$ (WARNING : at this date it is a z-c with maturity τ)
- The second one is to invest one euro on the zero coupon of maturity 1.

Q4 Write, in terms of $h_0(\tau), h_1(\tau), q(t, 1, n)$ the 2X2 matrix A of payments and the 2-vector p of prices associated to these two investment strategies.

Q5 Show by applying the main result of the course that there exists $\pi \in (0, 1)$ (independent of τ, t, n) such that :

$$1 = \pi h_0(\tau) + (1 - \pi)h_1(\tau)$$

Consider now $t \geq 2$, in the state n, and suppose that there were $n - 1$ schocks at date $t - 2$. There are hence two ways to obtain the state n at date t : a schok between $t - 2$ and $t - 1$ or a schock between $t - 1$ and t.

Q6 Write the price $q(t, \tau, n)$ in terms of $q(t - 2, ., n - 1)$, in two different ways

Q7 Show that $\frac{h_1(\tau)}{h_0(\tau)} = \left(\frac{h_1(1)}{h_0(1)}\right)^\tau = \delta^\tau$

Q8 Deduce :

$$\begin{aligned} q(t + 1, \tau, n) &= \frac{q(t, \tau + 1, n)}{q(t, 1, n)} \frac{1}{\pi + (1 - \pi)\delta^\tau} \\ q(t + 1, \tau, n + 1) &= \frac{q(t, \tau + 1, n)}{q(t, 1, n)} \frac{\delta^\tau}{\pi + (1 - \pi)\delta^\tau} \end{aligned}$$

At date t one knows the spot price curve $(\tau- > q(t, \tau, n))$, and the forward price curve $(\tau- > f_1(t, \tau, n))$

At date $t + 1$the spot price curve will be $(\tau- > q(t + 1, \tau, n)$ or $\tau- > q(t + 1, \tau, n + 1)$.

Q9 How the shape(s) of the spot price at date $t + 1$ can be obtained from the shape of the forward price of date t?

speed question

Bond

An ordinary bond, facial value 100, rate 3%, maturity T, has been issued at 90

1. Is the yield to maturity equal to 3%?

Assume that the rate curve is flat at r%.

2. Write the equation relating T to r.

Black and Scholes Partial Differential Equation

Consider a market where there is a Stock whose value S follows :

$$dS(t) = S(t)\mu(t)dt + S(t)\sigma(t)dB(t)$$

where μ and σ are deterministic functions of t and B a standard Brownian Motion. The money market is modelled by an instantaneous risk free interest rate $r(t)$. r is deterministic.

We consider a simple derivative whose value at t is $V(t, S(t))$.

Suppose you sell this derivative at t and buy δ stocks. Set $X = V - \delta S$.

Q1 Compute dX

Q2 At which condition the portfolio X is risk-free

Q3 show :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial S} rS + \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 = rV$$

Define

$$H(t) = \exp\left[-\int_0^t \left\{r(u) + \frac{1}{2}\theta(u)^2\right\} du - \int_0^t \theta(u)dB(u)\right] V(S(t), t)$$

where $\theta(t) = \frac{\mu(t)-r(t)}{\sigma(t)}$

We would like to compute dH

In order to do that we first compute $d(\ln(H))$

Q4 Show that

$$d\ln(H) = -\frac{1}{2}A(t)^2 dt + A(t)dB(t)$$

Where A is a random variable that depends on S and $\frac{\partial V}{\partial S}$

Q5 Then show that H is a martingale : $dH = HAdB(t)$

Q6 Deduce :

$$H(t) = \mathrm{E}\left[H(T)/H(t)\right]$$

Q7 Give then $V(t, S(t))$ as a function of $V(T, S(T))$.