Mesure de risque

4 janvier 2016

Toute activité économique implique de manière presque quotidienne de faire des choix entre décisions risquées, c'est à dire dont les conséquences ne sont pas connues avec certitude. Le cas le plus évident est, par exemple, celui du choix d'investissement : une même somme d'argent peut être investie soit dans un emprunt d'état à revenu fixe soit dans un portefeuille d'actions dont les rendements sont aléatoires. Pour une compagnie d'assurance, bien sûr, l'estimation du risque (au passif comme à l'actif) est évidemment central.

L'objet de ce paragraphe est de présenter un certain nombre d'outils qui permettent de comparer et de quantifier les risques. Le point de vue adopté ici est délibérément "statistique". Il est clair cependant que toute mesure de risque fait nécessairement référence à une appréciation : le choix entre plusieurs situations risquées répond nécessairement à un critère, une préférence et donc une attitude face au risque. Dans la deuxième partie de ce chapitre nous introduirons donc les hypothèses de comportement qui permettent de "classifier" les risques.

1 Hypothèses sur l'incertitude

Dans tout ce paragraphe nous supposons que la variable d'intérêt est le revenu associé à une décision. Certains auteurs préférent prendre

On a l'habitude de distinguer les situations risquées en fonction du degré d'information dont le décideur dispose sur les valeurs possibles et les probabilités de ces valeurs.

On dit qu'il y a incertitude radicale lorque le décideur ne connait ni les montants (valeurs possibles) ni les probabilités.

On dit qu'il y a incertitude simple lorsque l'on connait les montants et que l'on a une estimation (subjective ou non) de la densité de probabilité. C'est cette situation que nous voulons aborder ici.

Nous représentons ici le risque par une variable aléatoire réelle représentant le revenu incertain du décideur. Dans un premier temps nous supposerons que le support des variables aléatoires étudiées est borné $[a, b]$: la probabilité est nulle en dehors de cet intevalle. Une première question qui se pose est "l'étendue" du risque. Tel revenu variable est-il plus ou moins risqué que tel autre ? Cette question de mesure du risque est une question importante. Nous allons ici utiliser une méthode spécifique pour donner un sens à cette question.

2 Analyse du risque

Une des premières façons de représenter le risque est de dresser "l'histogramme des fréquences" ou plus généralement la "densité" de probabilité : à chaque valeur (ou à chaque intervalle de valeurs) possible est associé sa fréquence (sa probabilité). Une manière équivalente consiste à représenter la fonction de répartition (ou densité cumulée). Soit ainsi $\widetilde{w}$ une variable aléatoire de support fermé borné $[a, b]$. La fonction de répartition donne la probabilité que la variable soit inférieure à un seuil donné.

2.1 Fonction de répartition

Définition 1. La fonction de répartition F (ou cumulative ou CDF) d'une variable aléatoire réelle $\widetilde{w}$ est donnée par $F(x) = \Pr[\widetilde{w} \leq x]$. Cette fonction est positive croissante, continue à droite en tout point de $[-\infty, +\infty]$ et telle que $.x < a \Rightarrow F(x) = 0, x \geq b \Rightarrow F(x) = 1.$

Les points de discontinuité correspondent à des atomes (masses de Dirac). En ces points la densité de probabilité est infiniment concentrée.

2.2 Dominance stochastique de degré 1

Une première manière de comparer deux revenus aléatoires consiste à comparer la probabilité des événements défavorables. Implicitement, le décideur préfère les variables aléatoires qui ont plus de chances d'être plus grandes : si pour tout seuil u , la probabilité que le revenu soit plus petit que u est plus grande avec $\widetilde{v}$ qu'avec $\widetilde{w}$, on peut d'une certaine manière conclure que $\widetilde{v}$ est moins "favorable" que $\widetilde{w}$, puisque les mauvaises valeurs sont plus fréquentes. Cette remarque conduit à la définition suivante.

Définition 2. $\widetilde{w}$ domine $\widetilde{v}$ stochastiquement au dégré 1 si et seulement si $\forall u \in [a, b]$,$F_{\widetilde{v}}(u) \geq F_{\widetilde{w}}(u)$.

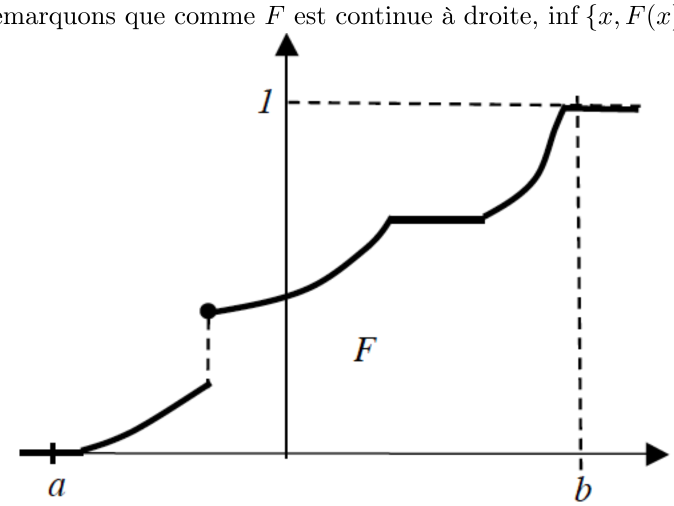
2.3 Fonction quantile et Value at Risk

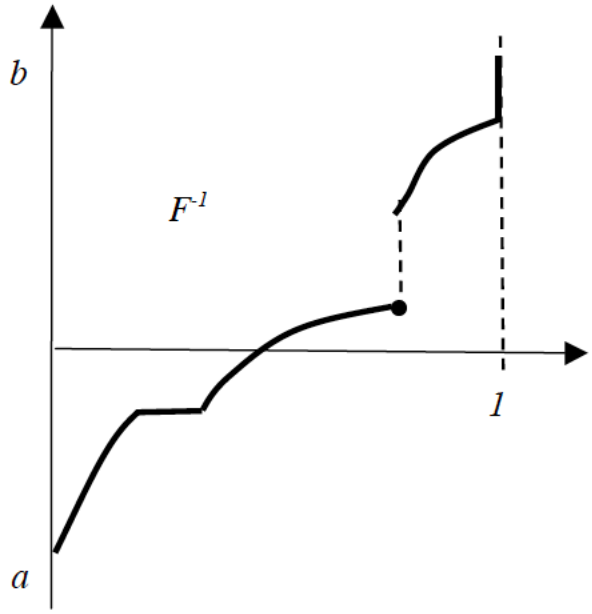
A cette fonction de répartition correspond la fonction quantile qui est simplement "la" fonction réciproque de le fonction de répartition.

Définition 3. La fonction quantile est définie par :

$$L^{(1)}_{\widetilde{w}}(u) = F^{-1}(u) = \inf\{x, F(x) \geq u\}$$

Remarquons que comme F est continue à droite, $\inf\{x, F(x) \geq u\}$ existe pout tout u.





La fonction quantile se lit de la manière suivante : dans $u \times 100$ pourcents des cas, la variable est inférieure à $L^{(1)}_{\widetilde{w}}(u)$

Il faut noter que les parties "horizontales" de F sont des "sauts" pour $L^{(1)} = F^{-1}$ et correspondent à des intervalles de probabilité nulle. Les sauts de F correspondent à des plateaux de F^{-1} sont des "atomes", c'est à dire des valeurs discrètes ayant des probabilités non nulles.

La fonction quantile donne une première idée de l'étendue du risque. En particulier, elle permet d'estimer le "matelas" nécessaire pour absorber les pertes (revenu négatif) sans faire appel à des rentrées extérieures. Par exemple on sait que la variable aléatoire, donc le revenu, a une probabilité de 10% d'être inférieure à $F^{-1}(0.1)$. Ainsi si l'individu ou l'institution possède une réserve supérieure à $-F^{-1}(0.1)$, la probabilité de faillite est inférieure à 0.1. Formellement, si Kest la réserve :

$$\Pr\left(K + \widetilde{w} \leq 0\right) \leq 0.1 \Rightarrow \Pr\left(\widetilde{w} \leq -K\right) \leq 0.1 \Rightarrow -K \leq F^{-1}(0.1) \Rightarrow K \geq -F^{-1}(0.1)$$

Définition 4. si $\widetilde{w}$ est le revenu aléatoire de fonction quantile F^{-1} on appelle Value at Risk au niveau u : $VaR_{\widetilde{w}}(u) = -F^{-1}_{\widetilde{w}}(u)$. C'est la réserve nécessaire pour absorber les pertes avec probabilité $1-u$.

Remarque 5. si la variable aléatoire étudiée est la perte (et non le revenu), i.e. $\widetilde{\ell} = -\widetilde{w}$, on a $F_\ell(s) = 1 - F_{\widetilde{w}}(-s)$ et la VaR s'écrit : $VaR_{\widetilde{\ell}}(u) = F^{-1}_{\widetilde{\ell}}(1-u)$

La Value at Risk est une "mesure de risque" très communément utilisée dans la pratique, y compris, d'ailleurs, pour des variables aléatoires de support infini.

Par exemple, pour une variable aléatoire gaussienne de moyenne μ et de variance σ^2, on a :

$$F^{-1}(\alpha) = \mu + N^{-1}(\alpha)\,\sigma$$

Où N^{-1} est la fonction quantile de la distribution gaussienne centrée réduite.

Pour une distribution de Cauchy on a :

$$F^{-1}(\alpha) = \mu + \sigma \tan\left(\frac{\pi}{2}(2\alpha - 1)\right)$$

3 Analyse de la concentration

La dominance stochastique à l'ordre 1 ne permet pas de comparer les "concentrations" des variables aléatoires. Dans ce paragraphe nous allons essayer de donner une sens à la comparaisons des concentrations.

3.1 Expected Shortfall, fonction de Lorenz

Certaines propriétés de la fonction quantile vont nous permettre d'analyser de manière assez naturelle la "concentration" du risque autour de la moyenne.

Le premier résultat est intéressant :

Proposition 6. *Si $\widetilde{w}$ est une variable aléatoire d'espérance finie (ce qui est le cas ici puisque son support est borné) on a :*

$$\mathbb{E}(\widetilde{w}) = \int_0^1 F^{-1}(t)dt$$

ce résultat s'obtient immédiatement par changement de variable $x = F^{-1}(t)$, $dt = dF(x)$.

Pour mieux cerner le risque on peut être tenté de focaliser l'attention sur les cas défavorables. On sait ainsi qu'avec probabilité α, le revenu est inférieur à $F^{-1}(\alpha)$, Le revenu moyen dans ces cas défavorables, c'est-à-dire $E(\widetilde{w}/\widetilde{w} \leq F^{-1}(\alpha))$, est égal à :

$$\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha F^{-1}(u)du$$

Ainsi, si on se focalise sur les 5% des cas les plus défavorables, le revenu moyen y est égal à $20\int_0^{0.05} F^{-1}(u)du$.

Définition 7. On appelle "Expected Shortfall" (ou aVaR) au niveau α la valeur espérée des pertes dans les $\alpha \times 100\%$ des cas les plus défavorables :

$$ES_{\widetilde{w}}(\alpha) = -\mathbb{E}(\widetilde{w}/\widetilde{w} \leq F^{-1}(\alpha)) = -\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha F^{-1}(u)du$$

On voit que ES est la moyenne des VaR. Nous verrons dans la suite que l'on peut généraliser ce genre de grandeur.

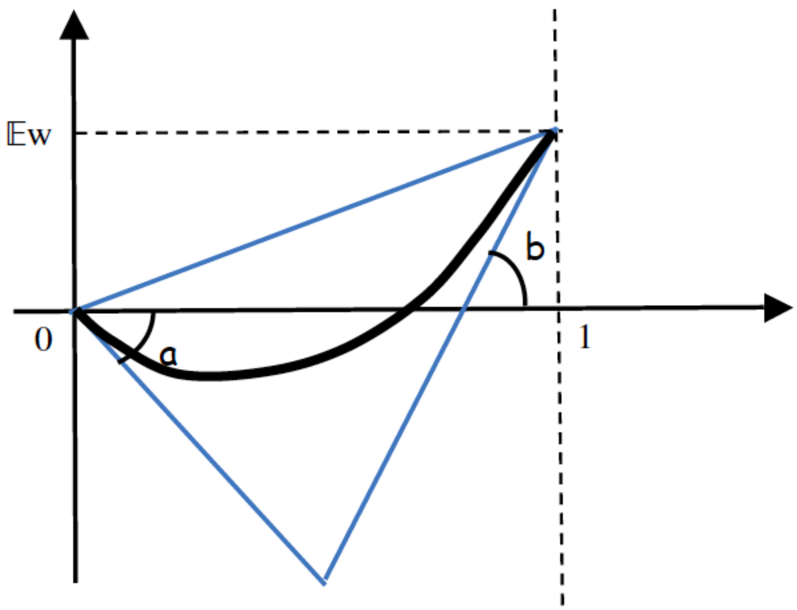
En fait, la fonction cumulée de la fonction quantile permet de donner une idée de la concentration de la distribution de probabilité.

Définition 8. On appele Fonction de Lorenz absolue la fonction définie par :

$$L^{(2)}_{\widetilde{w}}(\alpha) = \int_0^\alpha F^{-1}(u)du$$

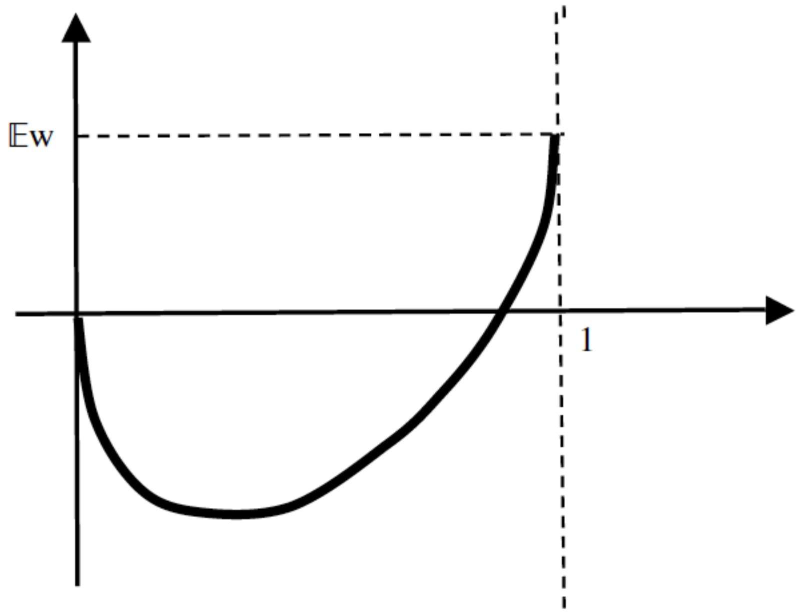
Proposition 9. *La fonction de Lorenz $L^{(2)}$ est une fonction convexe (donc continue et dérivable à gauche et à droite en chaque point) vérifiant $L^{(2)}(0) = 0$, $L^{(2)}(1) = \mathbb{E}[\widetilde{w}]$. Les dérivées en tout point croissent en prenant leurs valeurs entre a et b.*

Réciproquement, toute fonction convexe L entre 0 et 1, telle que $L(0) = 0$, $L(1) = c$, de pente supérieure à a en 0+ et inférieure à b en 1- est la fonction de Lorenz d'une variable aléatoire réelle de support inclus dans $[a, b]$ et d'espérance c.



Dans le graphique ci-dessus on a représenté la fonction de Lorenz d'une variable aléatoire. Le triangle a pour pentes $a \leq E(\widetilde{w}) \leq b$.

Remarque 10. Extension au support $]-\infty, +\infty[$. On peut définir la fonction de Lorenz d'une variable aléatoire de support $]-\infty, +\infty[$ à condition que son espérance soit $> -\infty$. Dans ce cas la fonction de Lorenz est convexe de pente $-\infty$ en (0,0) et de pente $+\infty$ en 1, avec une asymptote verticale en 1 dans le cas où $E(\widetilde{w}) = +\infty$.



3.2 Concentration à moyenne constante

Etant donnée une variable aléatoire de support $[a, b]$, et d'espérance $c = \mathbb{E}(\widetilde{w})$, la position de sa fonction de Lorenz dans le triangle de pentes $a \leq c \leq b$ donne une idée assez précise de la concentration.

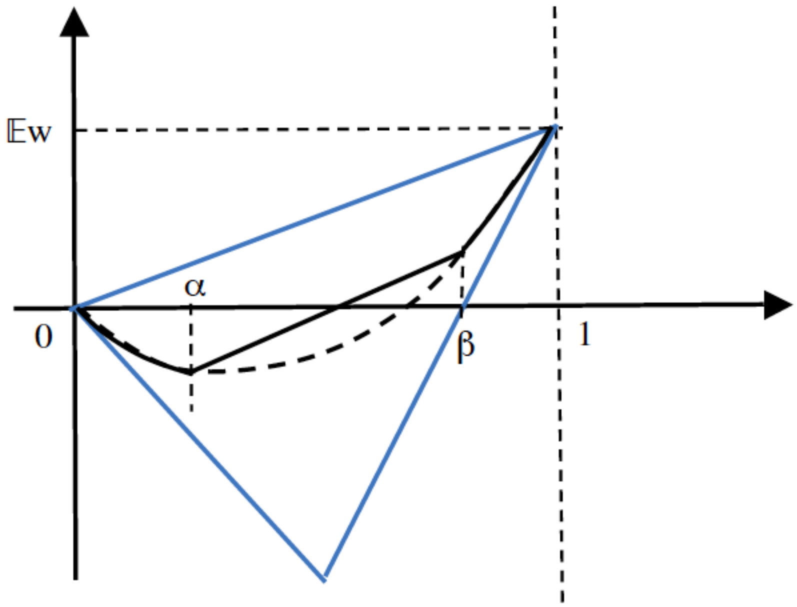
Soit par exemple la fonction de Lorenz linéaire (donc de pente $c = \mathbb{E}(\widetilde{w}))$) : $L^{(2)}(\alpha) = c\alpha$. Pour cette fonction de Lorenz F^{-1} est donc constante égale à c. La variable aléatoire est donc complétement concentrée sur c. Elle vaut c avec probabilité 1.

A l'opposé considérons la fonction de Lorenz formée du segment de pente a et du segment de pente b dont l'équation est $L(\alpha) = \max\{a\alpha, -b(1-\alpha)+c\}$. C' est la fonction de Lorenz de la variable aléatoire de support $[a, b]$ et d'espérance c la plus "excentrée" puisque les seules valeurs de probabilité non nulle sont les valeurs extrêmes a et b.

Remarque 11. notons que la fonction de Lorenz d'une variable uniforme sur $[a, b]$, avec $c = \frac{b+a}{2}$ est $L^{(2)}(u) = \frac{b-a}{2}u^2 + au$. C'est la parabole passant par (0,0) de pente a en 0 et b en 1.

De manière plus générale une simple manipulation sur la fonction de Lorenz permet de "concentrer" l'aléa. Plus précisément, prenons une variable aléatoire caractérisée par sa fonction de Lorenz $L^{(2)}$. Définissons une nouvelle variable aléatoire de la manière suivante. On fixe α et β entre 0 et 1 et on construit une nouvelle fonction convexe confondue avec $L^{(2)}$ à l'extérieur de $]\alpha, \beta[$ et égale à la corde (dont l'équation est $L^{(2)}(\alpha) + \frac{L^{(2)}(\beta) - L^{(2)}(\alpha)}{\beta - \alpha}(u - \alpha)$) entre α et β. Autrement dit, on définit une nouvelle fonction convexe par :

$$T_{[\alpha,\beta]}(L)(u) = \max\left\{L^{(2)}(u), L^{(2)}(\alpha) + \frac{L^{(2)}(\beta) - L^{(2)}(\alpha)}{\beta - \alpha}(u - \alpha)\right\}$$



Proposition 12. *Concentration élémentaire à moyenne constante. Etant donné une v.a. de fonction de Lorenz L, la fonction convexe* $T_{[\alpha,\beta]}(L)(u) = \max\left\{L^{(2)}(u), L^{(2)}(\alpha) + \frac{L^{(2)}(\beta)-L^{(2)}(\alpha)}{\beta-\alpha}(u-\alpha)\right\}$ *est la fonction de Lorenz de la variable aléatoire de même espérance obtenue en remplaçant* $\widetilde{w}$ *entre* $F^{-1}(\alpha)$ *et* $F^{-1}(\beta)$ *par une valeur constante égale à* $\frac{1}{\beta-\alpha}\int_{\alpha}^{\beta} F^{-1}(u)du$. *Cette valeur est simplement égale à l'espérance conditionnelle* $E\left(\widetilde{w}/\widetilde{w} \in \left[F^{-1}(\alpha), F^{-1}(\beta)\right]\right)$

En effet, entre α et β la "nouvelle" fonction quantile (qui est la dérivée de la fonction de Lorenz) est constante. La nouvelle fonction de répartition est confondue avec celle de $\widetilde{w}$ à l'extérieur de $\left[F^{-1}(\alpha), F^{-1}(\beta)\right]$ est constante égale à α entre $F^{-1}(\alpha)$ et $x = \frac{L^{(2)}(\beta)-L^{(2)}(\alpha)}{\beta-\alpha}$, a un saut d'amplitude $\beta-\alpha$ en $\frac{L^{(2)}(\beta)-L^{(2)}(\alpha)}{\beta-\alpha}$, et est constante égale à β entre $\frac{L^{(2)}(\beta)-L^{(2)}(\alpha)}{\beta-\alpha}$ et $F^{-1}(\beta)$.

Dans un certain sens, cette manipulation sur la fonction de Lorenz "concentre" la distribution tout en maintenant l'espérance constante.

Cette opération de concentration à moyenne constante va nous permettre de comparer deux variables aléatoires de même espérance. Soient alors $\widetilde{v}$ et $\widetilde{w}$ deux variables aléatoires de support inclus dans $[a,b]$ et d'espérance c. Si pour toute valeur de α $L^{(2)}_{\widetilde{v}}(\alpha) \leq L^{(2)}_{\widetilde{w}}(\alpha)$ on pourra conclure sans ambiguité que $\widetilde{w}$ est plus concentrée que $\widetilde{v}$. En effet, il est graphiquement facile de voir que l'on peut approcher la courbe $L^{(2)}_{\widetilde{w}}$ en opérant à partir de $L^{(2)}_{\widetilde{v}}$ une succession de concentrations élémentaires. A chaque étape on prend une corde s'appuyant sur la courbe et tangente à $L^{(2)}_{\widetilde{w}}$.

Définition 13. Soient deux variables aléatoires $\widetilde{v}$ et $\widetilde{w}$ de support inclus dans $[a,b]$ et de même espérance c. On dit que $\widetilde{w}$ est plus concentrée que $\widetilde{v}$, $\widetilde{w} \succsim \widetilde{v}$, si on peut obtenir la fonction de Lorenz de $\widetilde{w}$ comme limite de concentrations élémentaires à partir de la fonction de Lorenz de $\widetilde{v}$.

Proposition 14. *Soient deux variables aléatoires* $\widetilde{v}$ *et* $\widetilde{w}$ *de support inclus dans* $[a,b]$ *et de même espérance* c*, alors*

$$\forall \alpha, L_{\widetilde{v}}^{(2)}(\alpha) \leq L_{\widetilde{w}}^{(2)}(\alpha) \Longleftrightarrow \widetilde{w} \succsim \widetilde{v}$$

On remarquera que cette proposition s'étend sans difficultés au cas de distributions sur $]-\infty, +\infty[$ à condition que l'espérance reste finie.

Ainsi, lorsque la courbe de Lorenz de $\widetilde{w}$ est au dessus de celle de $\widetilde{v}$ avec les mêmes extrémités, on peut dire sans ambiguité que $\widetilde{w}$ est plus concentrée que $\widetilde{v}$.

3.3 Mesures de risque fondées sur la fonction quantile.

Il existe d'autres écritures équivalentes à $\forall \alpha, L_{\widetilde{v}}^{(2)}(\alpha) \leq L_{\widetilde{w}}^{(2)}(\alpha)$.

Soit une fonction réelle φ défine de $[0,1]$ dans $[0,1]$, intégrable.

Définissons :

$$\rho_\varphi(\widetilde{v}) = -\int_0^1 \varphi(u) F_{\widetilde{v}}^{-1}(u) du$$

On peut montrer que dès lors que φ est décroissante ρ_φ est un indicateur de risque :

En effet, en intégrant par parties on obtient :

$$\rho_\varphi(\widetilde{v}) = -\mathbb{E}(\widetilde{v})\varphi(1) + \int_0^1 \varphi'(u) L_{\breve{v}}^{(2)}(u) du$$

Ainsi, pour deux variables aléatoires de même espérance :

$$\rho_\varphi(\widetilde{v}) \geq \rho_\varphi(\widetilde{w}) \Longleftrightarrow \int_0^1 \varphi'(u) L_{\breve{v}}^{(2)}(u) du \geq \int_0^1 \varphi'(u) L_{\breve{w}}^{(2)}(u) du$$

Pour que $\rho_\varphi(.)$ soit un indicateur de rique il faudrait que $\rho_\varphi(\widetilde{v}) \geq \rho_\varphi(\widetilde{w})$ chaque fois que $\widetilde{w}$ est plus concentrée que $\widetilde{v}$, c'est-à-dire lorsque $\forall u$, $L_{\widetilde{v}}^{(2)}(u) \leq L_{\widetilde{w}}^{(2)}(u)$.

On voit alors que dès que φ est décroissante, $\widetilde{w} \succsim \widetilde{v} \Longrightarrow \rho_\varphi(\widetilde{v}) \geq \rho_\varphi(\widetilde{w})$. Réciproquement, si $\forall \varphi$ décroissante, $\rho_\varphi(\widetilde{v}) \geq \rho_\varphi(\widetilde{w})$, alors on doit avoir $\forall u$, $L_{\widetilde{v}}^{(2)}(u) \leq L_{\widetilde{w}}^{(2)}(u)$.

On peut ainsi énoncer la proposition :

Proposition 15. *Soient deux variables aléatoires $\widetilde{v}$ et $\widetilde{w}$ de support inclus dans $[a,b]$ et de même espérance c.*

$$\widetilde{w} \succsim \widetilde{v} \Longleftrightarrow \forall \varphi \text{ décroissante}, \ \rho_\varphi(\widetilde{v}) \geq \rho_\varphi(\widetilde{w})$$

Quand φ est décroissante, la grandeur $\rho_\varphi(\widetilde{w})$ peut ainsi être considérée comme une "mesure" particulière du risque $\widetilde{w}$.

Lorsque $\varphi(u) = \frac{1}{\alpha} 1_{[0,\alpha]}(u)$, fonction en escalier décroissante, $\rho_\varphi(\widetilde{w})$ est alors simplement l'expected shortfall au niveau α.

3.4 Mesures de risque cohérentes

Les mesures de risque de type ρ_φ définies dans le paragraphe précédent sont ainsi liées à la concentration du risque “autour de sa moyenne”.

D’une manière plus générale, on peut essayer de définir un indicateur de risque de manière axiomatique. Dans cette approche, une mesure de risque est une application qui associe un réel à chaque variable aléatoire de support $[a, b]$, vérifiant certaines propriétés de cohérence.

La littérature distingue 4 propriétés souhaitables :

Définition 16. Homogénéité positivive : $\forall \widetilde{w}, \forall \lambda \geq 0\ \rho(\lambda \widetilde{w}) = \lambda \rho(\widetilde{w})$

L’étendue du risque est indépendante de l’unité de compte.

On peut aussi rendre compte du fait que la “diversification” réduit le risque (sur des variables d’espérance finie) :

Définition 17. quelles que soient deux variables aléatoires $\widetilde{v}$ et $\widetilde{w}$ de support inclus dans $[a, b]$ et de même espérance. $\rho\left(\frac{\widetilde{v}+\widetilde{w}}{2}\right) \leq \frac{1}{2}\rho(\widetilde{v}) + \frac{1}{2}\rho(\widetilde{v})$

Augmenter l’espérance de $\widetilde{w}$ réduit le risque :

Définition 18. $\forall \widetilde{w}, \forall d \geq 0\ \rho(\widetilde{w} + d) = \rho(\widetilde{w}) - d$

Dernière propriété : monotonie.

Définition 19. Si $\widetilde{w} \geq \widetilde{v}$ alors $\rho(\widetilde{w}) \leq \rho(\widetilde{v})$

On peut montrer quer les seules mesures de risque qui vérifient ces quatre propriétés sont précisément celle de la forme :

$$\rho(\widetilde{w}) = -\int_0^1 \varphi(u)\, F_{\widetilde{w}}^{-1}(u)du$$

ou φ est une fonction décroissante.

4 Dominance stochastique d’ordre 2.

Les notions précédentes peuvent être aussi définies en analysant l’intégrale de la fonction de répartition ou bi-cumulée.

Définition 20. On appelle bicumulée $F_{\widetilde{w}}^{(2)}$ la fonction définie pour $x \in [a, b]$, par $F_{\widetilde{w}}^{(2)}(x) = \int_a^x F_{\widetilde{w}}(y)dy$

Il existe une relation remarquable entre la fonction bicumulée et la fonction de Lorenz.

Proposition 21. *Etant donnée une variable aléatoire réelle de support $[a, b]$,on a*

$$F_{\widetilde{w}}^{(2)}(x) = \max_\alpha \left[\alpha x - L_{\widetilde{w}}^{(2)}(\alpha)\right]$$

$$L_{\widetilde{w}}^{(2)}(\alpha) = \max_x \left[x\alpha - F_{\widetilde{w}}^{(2)}(x)\right]$$

(On dit que les fonctions $F_{\widetilde{w}}^{(2)}$ et $L_{\widetilde{w}}^{(2)}$ sont duales au sens de Fenchel Moreau)

En effet, comme maximum de fonction affines en x ,$x \to \max_\alpha \left[\alpha x - L^{(2)}_{\widetilde{w}}(\alpha)\right]$ est convexe. Par ailleurs, comme L est convexe, la condition du premier ordre $x = L'(\alpha^*) \Longleftrightarrow \alpha^* = F(x)$ est nécessaire et suffisante.

et donc :

$$\max_\alpha \left[\alpha x - L^{(2)}_{\widetilde{w}}(\alpha)\right] = xF(x) - \int_0^{F(x)} F^{-1}(u)\,du = xF(x) - \int_a^x ydF(y) = \int_a^x F(y)dy$$

La deuxième égalité s'obtient de la même manière.

Notons qu'en particulier on a

$$F^{(2)}_{\widetilde{w}}(b) = \max_\alpha \left[\alpha b - L^{(2)}_{\widetilde{w}}(\alpha)\right] = b - E(\widetilde{w})$$

On en déduit le résultat suivant :

Proposition 22. *Soient deux variables aléatoires $\widetilde{v}$ et $\widetilde{w}$ de support inclus dans $[a, b]$ et de même espérance c.*

$$\widetilde{w} \succsim \widetilde{v} \Longleftrightarrow \forall x,\ F^{(2)}_{\widetilde{w}}(x) \leq F^{(2)}_{\widetilde{v}}(x)$$

En effet :

$\widetilde{w} \succsim \widetilde{v} \Longleftrightarrow \forall\alpha,\ L^{(2)}_{\widetilde{w}}(\alpha) \geq L^{(2)}_{\widetilde{v}}(\alpha)$

$\Rightarrow \forall x, \alpha\ \alpha x - L^{(2)}_{\widetilde{w}}(\alpha) \leq \alpha x - L^{(2)}_{\widetilde{v}}(\alpha)$

$\Rightarrow \forall x,\ \max_\alpha \left[\alpha x - L^{(2)}_{\widetilde{w}}(\alpha)\right] \leq \max_\alpha \left[\alpha x - L^{(2)}_{\widetilde{v}}(\alpha)\right]$

Définition 23. Soient deux variables aléatoires $\widetilde{v}$ et $\widetilde{w}$ de support inclus dans $[a, b]$. On dit que $\widetilde{w}$ domine stochastiquement $\widetilde{v}$, au deuxième degré, $\widetilde{w}\, SSD\, \widetilde{v}$, si $\forall x, , F^{(2)}_{\widetilde{w}}(x) \leq F^{(2)}_{\widetilde{v}}(x)$ avec $F^{(2)}_{\widetilde{w}}(b) = F^{(2)}_{\widetilde{v}}(b)$

Proposition 24. *Soient deux variables aléatoires $\widetilde{v}$ et $\widetilde{w}$ de support inclus dans $[a, b]$ et de même espérance c.*

$$\widetilde{w}\, SSD\, \widetilde{v} \Longleftrightarrow \forall x,\ F^{(2)}_{\widetilde{w}}(x) \leq F^{(2)}_{\widetilde{v}}(x) \Longleftrightarrow \forall\alpha, L^{(2)}_{\widetilde{w}}(\alpha) \geq L^{(2)}_{\widetilde{v}}(\alpha) \Longleftrightarrow \widetilde{w} \succsim \widetilde{v}$$

On a donc coincidence entre concentration au sens des fonctions de Lorenz et la dominance stochastique au deuxième degré.

5 Etalement à moyenne constante

On peut définir à l'aide de la fonction de répartition et de la bi cumulée la notion d'étalement à moyenne constante. Soient deux variables $\widetilde{v}$ et $\widetilde{w}$ de support inclus dans $[a, b]$ et de même espérance. On note $F_{\widetilde{v}}$ et $F_{\widetilde{w}}$ leurs fonction de répartition.

Définition 25. $\widetilde{v}$ est un étalement à moyenne constante élémentaire de $\widetilde{w}$ si et seulement si

1. il existe un intervalle $[x, y]$ tel que $\forall s \in [x, y]\,, F_{\widetilde{v}}(x) = F_{\widetilde{v}}(s) = F_v(y)$. C'est à dire $\Pr[\widetilde{v} \in [x, y]] = 0$.

2. Et d'autre part, $\mathbb{E}[\widetilde{v}] = \mathbb{E}[\widetilde{w}]$, c'est à dire $\int_a^b F_{\widetilde{v}}(s)ds = \int_a^b F_{\widetilde{w}}(s)ds$

Un étalement élémentaire à moyenne constante consiste à "prendre la masse sur un intervalle $[x, y]$ et à la répartir à l'extérieur" tout en maintenant l'espérance constante.

Définition 26. $\widetilde{v}$ est un étalement à moyenne constante de $\widetilde{w}$ si et seulement si et seulement si $\widetilde{v}$ est obtenue par une suite (éventuellement infinie) d'étalements élémentaires de $\widetilde{w}$.

Il est intéressant de bien comprendre l'effet d'un étalement élémentaire sur la bi-cumulée.

On sait que $F_{\widetilde{w}}^{(2)}(x) = \int_a^x F_{\widetilde{w}}(s)ds$. $F_{\widetilde{w}}^{(2)}$ est une fonction convexe (puisque sa dérivée est croissante). Etant donné un intervalle $[x, y]$ définissons la fonction affine suivante :

$$s \to \frac{F_{\widetilde{w}}^{(2)}(y) - F_{\widetilde{w}}^{(2)}(x)}{y - x}(s - x) + F_{\widetilde{w}}^{(2)}(x)$$

C'est la corde de $F_{\widetilde{w}}^{(2)}$ entre les points d'abscisse x et y. Soit alors la fonction :

$$G(s) = \max\left\{F_{\widetilde{w}}^{(2)}(s), \frac{F_{\widetilde{w}}^{(2)}(y) - F_{\widetilde{w}}^{(2)}(x)}{y - x}(s - x) + F_{\widetilde{w}}^{(2)}(x)\right\}$$

C'est la fonction dans laquelle remplace $F_{\widetilde{w}}^{(2)}$ par sa corde entre x et y . C'est évidemment une fonction convexe. Il est facile de voir que c'est la bicumulée de la variable aléatoire de même espérance mais qui ne prend jamais des valeurs dans $[x, y]$. En effet entre x et y $G'(s)$ est constant, ce qui veut dire que la mesure de $[x, y]$ est nulle.

Prenons maintenant deux variables aléatoires de même espérance telles que $F_{\widetilde{w}}^{(2)}(x) \leq F_{\widetilde{v}}^{(2)}(x)$. Ce sont donc deux fonctions croissantes convexes qui ont mêmes valeurs en a, (0) et b, $(b - \mathbb{E}(\widetilde{w}))$.

Il est intuitif de voir que l'on peut obtenir $F_{\widetilde{v}}^{(2)}$ comme limite d'une suite de fonctions $F_k^{(2)}$ où $F_1^{(2)} = F_{\widetilde{kw}}^{(2)}$ et $F_{k+1}^{(2)}$ est une étalement élémentaire $F_k^{(2)}$ où la corde est tangente à $F_{\widetilde{v}}^{(2)}$.

On a donc le résultat suivant :

Proposition 27. *Soient deux variables aléatoires $\widetilde{v}$ et $\widetilde{w}$ de support inclus dans $[a, b]$ et de même espérance c.*

$$\forall x,\ F_{\widetilde{w}}^{(2)}(x) \leq F_{\widetilde{v}}^{(2)}(x) \Longleftrightarrow \widetilde{v} \text{ est un étalement à moyenne constante de } \widetilde{w}$$

6 Espérance d'utilité

Définition 28. Hypothèse d'espérance d'utilité. On dit que la décision repose sur l'espérance d'utilité s'il exsite une fonction réelle à variable réelle u, croissante, telle que pour toutes variables aléatoires de revenu $\widetilde{w}_1$ et $\widetilde{w}_2$, $\widetilde{w}_1$ est préférée à $\widetilde{w}_2$ si et seulement si $\mathbb{E}[u(\widetilde{w}_1)] \geq \mathbb{E}[u(\widetilde{w}_2)]$.

Soient F_1 et F_2 les fonctions de répartition et $F_1^{(2)}$ et $F_2^{(2)}$ les bicumulées de $\widetilde{w}_1$ et $\widetilde{w}_2$, on a :

$$\mathbb{E}[u(\widetilde{w}_1)] \geq \mathbb{E}[u(\widetilde{w}_2)] \Longleftrightarrow \int_a^b u(x)[dF_1(x) - dF_2(x)] \geq 0$$

En intégrant par parties :

$$\mathbb{E}\left[u\left(\widetilde{w}_1\right)\right] \geq \mathbb{E}\left[u\left(\widetilde{w}_2\right)\right] \Longleftrightarrow \left[u(x)\left(F_1(x)-F_2(x)\right)\right]_a^b - \int_a^b u'(x)\left[F_1(x)-F_2(x)\right] \geq 0$$

Comme F_1 et F_2 coincident en a et b :

$$\mathbb{E}\left[u\left(\widetilde{w}_1\right)\right] \geq \mathbb{E}\left[u\left(\widetilde{w}_2\right)\right] \Longleftrightarrow -\int_a^b u'(x)\left[F_1(x)-F_2(x)\right] \geq 0$$

En intégrant par parties une seconde fois :

$$\mathbb{E}\left[u\left(\widetilde{w}_1\right)\right] \geq \mathbb{E}\left[u\left(\widetilde{w}_2\right)\right] \Longleftrightarrow -\left[u'(x)\left(F_1^{(2)}(x)-F_2^{(2)}(x)\right)\right]_a^b + \int_a^b u''(x)\left[F_1^{(2)}(x)-F_2^{(2)}(x)\right]dx \geq 0$$

$$u'(b)\left(\mathbb{E}\left(\widetilde{w}_1\right)-\mathbb{E}\left(\widetilde{w}_2\right)\right) + \int_a^b u''(x)\left[F_1^{(2)}(x)-F_2^{(2)}(x)\right]dx \geq 0$$

On en déduit :

Proposition 29. *Soient deux variables aléatoires $\widetilde{w}_1$ et $\widetilde{w}_2$ de support inclus dans $[a,b]$.*

$$\forall x,\ F_1^{(2)}(x) \leq F_2^{(2)}(x) \Longleftrightarrow \forall u, u' \geq 0, u'' \leq 0, \mathbb{E}\left[u\left(\widetilde{w}_1\right)\right] \geq \mathbb{E}\left[u\left(\widetilde{w}_2\right)\right]$$

Ainsi, si on a deux varaibles aléatoires telles que $\forall x,\ F_1^{(2)}(x) \leq F_2^{(2)}(x)$, (et donc en particulier $\mathbb{E}\left(\widetilde{w}_1\right) \geq \mathbb{E}\left(\widetilde{w}_2\right)$). Alors tout critère concave croissant placera $\widetilde{w}_1$ devant $\widetilde{w}_2$.

7 Critère dual RDEU

L'approche précédente permet de définir une dualité entre l'hypothèse d'espérance d'utilité et l'hypothèse de "rank dependent expected utility". Considérons le critère suivant :

$$U_\varphi\left(\widetilde{v}\right) = \int_0^1 \varphi(t) F_{\widetilde{v}}^{-1}(t)dt$$

où φ est une fonction donnée.
Une intégration par parties donne :

$$U_\varphi\left(\widetilde{v}\right) = \varphi\left(1\right)\mathbb{E}\widetilde{v} - \int_0^1 \varphi'(t) L_{\widetilde{v}}^{(2)}(t)dt$$

Si φ est décroissante on a :

$$\forall t \in [0,1], L_{\widetilde{v}}^{(2)}(t) \leq L_{\widetilde{w}}^{(2)}(t) \quad et \quad \mathbb{E}\widetilde{v} = \mathbb{E}\widetilde{w} \Rightarrow U_\varphi\left(\widetilde{v}\right) \leq U_\varphi\left(\widetilde{w}\right)$$

On en déduit qu'une fonction φ décroissante décrit un comportement d'aversion au risque au même titre qu'une fonction d'utilité concave dans l'approche EU.

Si de plus φ est positive (ce qui est nécessaire si l'on veut que le décideur ait une utilité croissante pour des revenus certains croissants) on a :

$$\forall t \in [0,1], L_{\widetilde{v}}^{(2)}(t) \leq L_{\widetilde{w}}^{(2)}(t) \Rightarrow U_\varphi\left(\widetilde{v}\right) \leq U_\varphi\left(\widetilde{w}\right)$$

On peut réécrire (en changeant de variable) :

$$U_{\varphi}(\widetilde{v}) = \int_a^b x\varphi(F(x))dF(x)$$

En prenant ϕ primitive de φ et $\phi(F(x)) = \psi(x)$

$$U_{\varphi}(\widetilde{v}) = \int_a^b xd\psi(x)$$

Si l'on prend la primitive de ϕ qui vaut 0 en 0 et 1 en 1. Tout ce passe comme si l'on changeait la distribution de probabilité en passant de la distribution F à la distribution $\phi \circ F = \psi$

Définition 30. Hypothèse RDEU. On dit que la décision repose sur l'hypothèse RDEU s'il exsite une fonction réelle à variable dans $[0,1]$ ϕ, croissante, telle que pour toutes variables aléatoires de revenu $\widetilde{w}$ et $\widetilde{v}$, $\widetilde{w}$ est préférée à $\widetilde{v}$ si et seulement si $\int_a^b x\phi'(F_w(x))dF_w(x) \geq \int_a^b x\phi'(F_v(x))dF_v(x)$. Quand ϕ est concave, le décideur est risquophobe au sens où sa satisfaction décroit avec un étalement à moyenne constante.

Quand ϕ est concave le décideur surpondère les événements défavorables.

8 Ambiguité

On parle d'ambiguité quand la distribution de probabilité est elle même entachée d'incertitude. Ainsi on peut supposer que $\widetilde{w}$ suit une loi qui dépend d'un paramètre θ : $dF(\theta, x)$. Le paramètre lui-même est distribué selon une loi dGconnue. Soit χ une fonction croissante. On définit alors l'utilité associée à $\widetilde{w}$ de la manière suivante :

$$U_{\varphi,\chi}(\widetilde{v}) = \chi^{-1}\left[\int_{\Theta} \chi\left(\int_a^b x\varphi(F(\theta,x))dF(\theta,x)\right) dG(\theta)\right]$$

$$U_{\varphi,\chi}(\widetilde{v}) = \chi^{-1}\left[\int_{\Theta} \chi\left(\int_0^1 \varphi(u)F^{-1}(\theta,u)du\right) dG(\theta)\right]$$

On a :

$$\int_{\Theta}\int_a^b x\varphi(F(\theta,x))dF(\theta,x)dG(\theta) = \int_0^1 \varphi(u)\left[\int_{\Theta} F^{-1}(\theta,u)\, dG(\theta)\right] du$$

Lorsque χ est concave on a aversion pour l'ambiguité.

Annexe :

Quelques propriétés de F^{-1}

Simlulation

Soit $u \curvearrowright U[0,1]$
Considérons la distribution de $x = F^{-1}(u)$

$$\Pr\left[x\le y\right]=\Pr\left[F^{-1}\left(u\right)\le y\right]=\Pr\left[u\le F(y)\right]=F(y)$$

Ainsi pour simuler une loi quelconque il "suffit" d'un gérérateur aléatoire uniforme dans $[0,1]$ et d'appliquer F^{-1}.

Espérance conditionnelle

$$\int_u^v F^{-1}(t)dt=\int_{F^{-1}(u)}^{F^{-1}(v)} xdF=(v-u)\,\mathbb{E}\left[x/x\in\left[F^{-1}\left(u\right),F^{-1}\left(v\right)\right]\right]$$

Formules lorsque le VA est le risque

Lorsque la variable est la variable risque : $\ell=-w$

- Fonction de répartition :

$$F_\ell\left(x\right)=\Pr\left[\ell\le x\right]=\Pr\left[w\ge -x\right]=1-F_w\left(-x\right)$$

- Fonction quantile :

$$F_\ell^{-1}\left(u\right)=-F_w^{-1}\left(1-u\right)$$
$$F_w^{-1}\left(u\right)=-F_\ell^{-1}\left(1-u\right)$$

- Value at risk

$$\Pr\left[\ell\ge V\right]\le\alpha\Longleftrightarrow 1-F_\ell\left(V\right)\le\alpha\Longleftrightarrow V\ge F_\ell^{-1}\left(1-\alpha\right)$$
$$VaR\left(\alpha\right)=F_\ell^{-1}\left(1-\alpha\right)=-F_w^{-1}\left(\alpha\right)$$

- Mesure de risque (aVaR) :

$$\rho_\varphi=-\int_0^1\varphi(u)F_w^{-1}(u)du=\int_0^1\varphi(u)F_\ell^{-1}(1-u)du=\int_0^1\varphi(1-t)F_\ell^{-1}(t)dt$$

- Utilité

$$U_\varphi=\int_0^1\varphi(t)F_w^{-1}(t)dt=-\int_0^1\varphi(1-t)F_\ell^{-1}(t)dt$$