INTRODUCTION A LA THEORIE DES JEUX

1 Introduction

Il existe de multiples exemples, dans le domaine de l'économie, mais aussi plus largement, dans un grand nombre d'activités humaines, de situations dans lesquelles il existe une interaction entre différents acteurs, c'est-à-dire lorsque le résultat d'un processus dépend de l'ensemble des actions prises par différents agents. L'objet de la théorie des jeux est la formalisation de ces interactions pour tenter (approche positive) d'en prédire l'évolution, ou (approche normative) de conseiller le ou les joueurs sur le meilleur coup à jouer. L'exemple emblématique de jeu est le jeu de société : la règle du jeu spécifie les actions possibles et leur résultats. Aux échecs par exemple le résultat dépend de ce que jouent les blanc et les noirs en respectant les modes de déplacement des pièces.

Un jeu peut comporter un conflit d'intérêt, c'est-à-dire une situation dans laquelle il y a antagonisme dans les issues. Mais il peut aussi comporter de la convergence d'intérêts, et le problème qui se pose est alors celui de la coordination des actions.

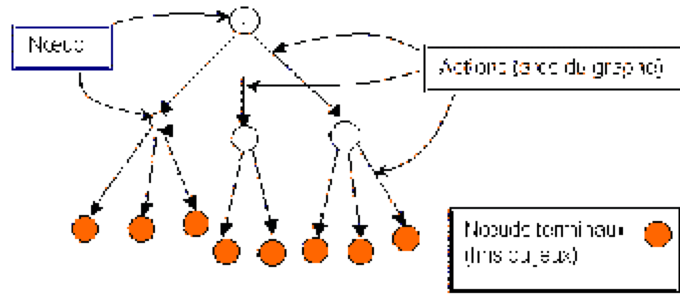
Nous raisonnons ici dans un cadre dit non coopératif . Autrement dit les acteurs sont supposés prendre leurs décisions librement sans possibilité de concertation et d'engagement *a priori*.

2 Jeux sous forme extensive

2.1 Représentation

Définition 1 *arbre du jeu*

- arbre (graphe connexe sans cycle[a]) représentant les déroulements possibles du jeu :



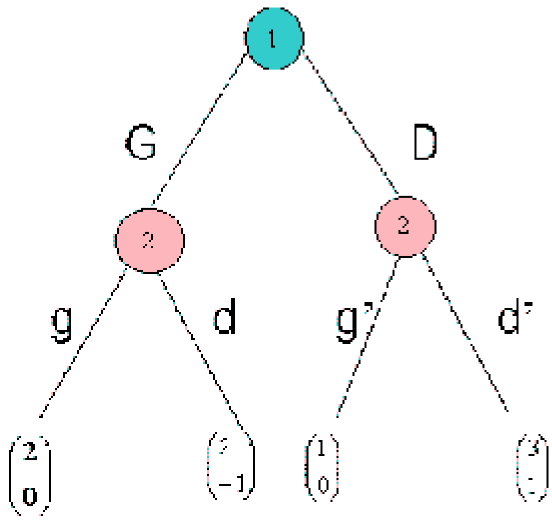
- à chaque nœud non terminal est associé un **joueur** : arrivé à ce point du jeu c'est à son tour de jouer.
- Chaque arc représente chacune **des actions** (coups autorisés par la règle) que ce joueur peut prendre à ce point du jeu.
- à chaque **nœud terminal** correspond un résultat du jeu donné de manière générale par un vecteur dit vecteur des paiements (liste des gains attribués à chaque joueur).

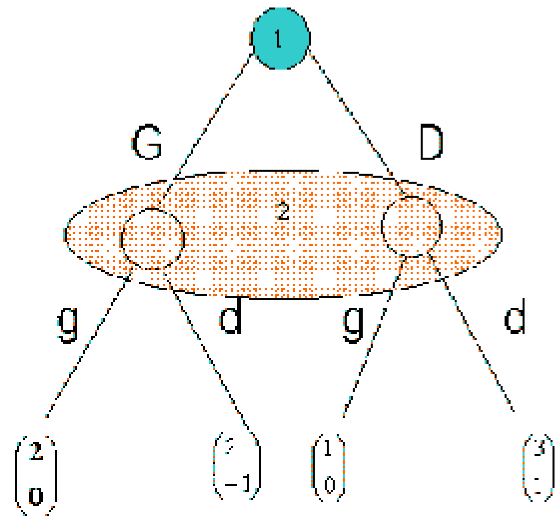
Définition 2 *jeu fini en information parfaite*

Un jeu sous forme extensive, en information parfaite, est défini par :

- l'ensemble des **joueurs** $i \in \{1, 2, \ldots, N\}$
- l'**arbre** du jeu : constitué d'un ensemble fini de nœuds $T = \{t_1, t_2, \ldots, t_k\}$ muni d'une relation de succession.
  * Le nœud initial (début du jeu) n'est le successeur d'aucun autre nœud.
  * Chaque nœud (non initial) est le successeur d'un seul nœud.
  * Les nœuds terminaux n'ont pas de successeurs (on note $s(t)$, l'ensemble des successeurs d'un nœud t)
- à chaque nœud t (non terminal) est associé un joueur $i(t)$. A ce point du jeu c'est à $i(t)$ de jouer.
- A chaque nœud t est associé un ensemble d'actions $A(t)$, à chaque action correspond un nœud successeur unique dans $s(t)$.
- A chaque nœud terminal z est associé un vecteur des paiements. $u(i, z)$ est le gain du joueur i si le jeu se termine au nœud z.

[a] Définition :
On se donne un ensemble (fini) de nœuds T et une relation de succession : σ sur T telle que :
(i) $\exists! a_0, \forall a \in T \ \neg(a_0 \sigma a)$ (un nœud initial)
(ii) $\forall a \neq a_0, \exists! b \ a \sigma b$ (un prédécesseur unique)
(iii) Si on note $s(a) = \{b, b\sigma a\}$ on doit avoir, $\forall a, \forall n \in \mathbb{N}, a \notin s^n(a)$ (pas de cycle)





Dans le jeu ci-dessus :

- lorsque 1 joue G et 2 joue g, les gains sont 2 pour le joueur 1 et 0 pour le joueur 2.

- lorsque 1 joue G et 2 joue d, les gains sont 2 pour le joueur 1 et -1 pour le joueur 2.

- lorsque 1 joue D et 2 joue g', les gains sont 1 pour le joueur 1 et 0 pour le joueur 2.

Remarque : le joueur 2 observe ce qu'a joué le joueur 1 ! De nombreux jeux entrent dans cette catégorie, évidemment les graphes associés peuvent être plus ou moins compliqués !

2.2 Information imparfaite

Pour prendre en compte les situations dans lesquelles un joueur n'a pas les moyens d'observer certaines des actions d'un autre joueur, on introduit la notion d'ensemble d'information :

Définition 3 *Un ensemble d'information est un ensemble de nœuds indiscernables pour le joueur à qui c'est le tour de jouer. Evidemment, en deux nœuds appartenant à un même ensemble d'information, les actions possibles doivent être strictement les mêmes (sinon les nœuds ne seraient pas indiscernables).*

Le joueur 2 ne sait pas ce qu'a joué 1. Tout se passe comme si 1 et 2 jouaient simultanément.

3 Forme normale d'un jeu

3.1 Stratégies et forme normale

Définition 4 *: stratégies et forme normale*

- une stratégie (*ex ante*) est la donnée d'une liste des actions qu'un joueur projette de jouer à chacun des nœuds (ou ensembles d'information) où il aura potentiellement la main. On note X_i l'ensemble des stratégies du joueur i pour le jeu donné.

- Un jeu sous forme normale est défini par :

  – N, ensemble des joueurs
  – $X = \prod_i X_i$, l'ensemble des stratégies
  – Les fonctions de paiement qui spécifient le gain de chaque joueur en fonction des stratégies jouées par l'ensemble des joueurs :

    $u_i : X \to \mathbb{R},\ (x_1, x_2, \dots x_N) \mapsto u_i(x_1, x_2, \dots x_N)$

    Un jeu sous forme normale sera ainsi noté $\Gamma(N, X, (u_i)_{i=1 \dots N})$

Il est important de noter qu'une stratégie est un objet compliqué au sens où le joueur définit l'ensemble des actions qu'il prendra en tout point où il aura la main ! Tout se passe comme si le joueur devait programmer une machine pour jouer à sa place : il ne doit pas laisser de situations imprévues (y compris celles qui pourraient apparaître absurdes !)! Il est usuel de représenter un jeu fini à deux joueurs sous forme normale par le tableau des gains. Pour le jeu de l'exemple 1 la forme normale s'écrit :

	gg'	gd'	dg'	dd'
G	2 0	2 0	2 -1	2 -1
D	1 0	3 1	1 0	3 1

Exemple 5 *Exemple 2*

	g	d
G	2 0	2 -1
D	1 0	3 1

3.2 Jeux à deux joueurs à somme nulle

Définition 6 *: On dit qu'un jeu à 2 joueurs est à somme nulle si :*

$$\forall x_1, x_2 \; u_1(x_1, x_2) + u_2(x_1, x_2) = 0$$

Ainsi, ce que gagne l'un est perdu par l'autre. Lorsque le résultat du jeu pour un joueur est le gain la perte ou la partie nulle (sans spécification du montant en jeu), on écrit $u_i(x) = 1, -1$ *ou* 0.

4 Le problème stratégique

Ayant ainsi défini un jeu sous forme extensive puis sous forme normale, la première question qui se pose est simple : peut-on raisonnablement prédire les comportements qui vont être adoptés par les joueurs ? Le caractère interactif d'un jeu implique que la réponse à cette question n'est pas immédiate. Dans un jeu à deux joueurs par exemple, chaque joueur se pose la question de savoir quelle stratégie sera adoptée par l'autre pour réagir en conséquence. Mais il sait que l'autre est dans la même situation.

4.1 Comportement prudent

L'analyse d'un jeu à somme nulle permet de mettre en évidence le type de problème rencontré.

Imaginons le raisonnement suivant du joueur 1. Si je joue la stratégie x et que l'autre le sait, il jouera en conséquence, c'est-à-dire qu'il adoptera une stratégie qui maximise son gain pour x. Comme le jeu est à somme nulle, il choisira une stratégie qui minimise en y $u_1(x, y)$ (en supposant qu'une telle stratégie existe). J'obtiendrai ainsi $v_1(x) \equiv \min_y u_1(x, y)$. Mon choix est alors très simple : j'adopterai une stratégie qui maximise v_1, et j'obtiendrai ainsi $\max_x \min_y u_1(x, y)$. Remarquons ici, que tout se passe comme si 1 jouait en premier et adoptait la meilleure stratégie qui tienne compte de la réponse optimale de 2.

Définition 7 *: stratégies prudentes. Dans un jeu à somme nulle, on appelle paiement minimum garanti du joueur 1 la valeur de* $\max_x \min_y u_1(x, y) \equiv \alpha_1$*. C'est effectivement le paiement minimum garanti dans le sens où il existe une stratégie qui assure ce paiement au joueur, cette stratégie,* $\arg\max_x \min_y u_1(x, y)$ *est appelée stratégie prudente.*

Un autre raisonnement est cependant possible. Le joueur 1 peut parfaitement se dire que 2 tiendra exactement le raisonnement précédent ! Tout se passe alors comme si 1 jouait en second. Si 2 joue y j'ai intérêt à répondre une stratégie qui maximise en x $u_1(x, y)$. J'obtiendrai alors $w_1(y) = \max_x u_1(x, y)$, alors que 2 obtiendra $v_2(y) = \min_x u_2(x, y) = -\max_x u_1(x, y)$. Je peux en déduire que 2 aura intérêt à jouer une stratégie qui maximise $v_2(y)$. 2 obtiendra alors, $\alpha_2 \equiv \max_y \min_x u_2(x, y) = \max_y (-\max_x u_1(x, y)) = -\min_y \max_x u_1(x, y)$ et j'obtiendrai donc $\beta_1 \equiv \min_y \max_x u_1(x, y) = -\alpha_2$.

Remarque : il est facile de voir que l'on a :

$$\max_x \min_y u_1(x, y) \equiv \alpha_1 \leq \beta_1 \equiv \min_y \max_x u_1(x, y)$$
$$\min_y \max_x u_1(x, y) = -\max_y \min_x u_2(x, y) = -\alpha_2$$

Deux cas de figure peuvent alors se présenter :

- Si $\alpha_1 = \beta_1$, c'est-à-dire si $\max_x \min_y u_1(x, y) = \min_y \max_x u_1(x, y)$, les deux raisonnements sont compatibles et on peut imaginer que chacun des deux joueurs va adopter une stratégie prudente .

- Sinon, $\alpha_1 < \beta_1$, il y a conflit entre les deux raisonnements, chacun aimerait pouvoir jouer en second !

4.2 Elimination des stratégies dominées

- Stratégies dominées

Prédire le comportement est ainsi chose difficile. On peut cependant sérier les problèmes et tenter de proposer certains principes de comportement raisonnables. D'une manière générale, on peut se poser une première question

: existe-t-il des stratégies qui n'ont aucune chance d'être jouées rationnellement par les joueurs ?

Définition 8 *: Dominance. Etant donné un jeu sous forme normale* $\Gamma(N, X, (u_i)_{i=1\ldots N}))$, *On dit que la stratégie* x_i^0 *est* ***strictement dominée*** *par la stratégie* x_i^1 *pour le joueur i si et seulement si :*
$\forall x_1, \ldots x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots x_n,\ u_i(x_1, \ldots x_{i-1}, x_i^0, x_{i+1}, \ldots x_n) < u_i(x_1, \ldots x_{i-1}, x_i^1, x_{i+1}, \ldots x_n)$ *que l'on peut réécrire sous une forme plus lisible :* $\forall x_{-i},\ u_i(x_{-i}, x_i^0) < u_i(x_{-i}, x_i^1)$.

Contre toute défense , jouer la stratégie x_i^1 *donne toujours* ***strictement plus*** *au joueur i que jouer* x_i^0.

On dit que la stratégie x_i^0 *est* ***faiblement dominée*** *par la stratégie* x_i^1 *pour le joueur i si et seulement si :*
$\forall x_1, \ldots x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots x_n,\ u_i(x_1, \ldots x_{i-1}, x_i^0, x_{i+1}, \ldots x_n) \leq u_i(x_1, \ldots x_{i-1}, x_i^1, x_{i+1}, \ldots x_n)$ *que l'on peut réécrire sous une forme plus lisible :* $\forall x_{-i},\ u_i(x_{-i}, x_i^0) \leq u_i(x_{-i}, x_i^1)$.

Contre toute défense , jouer la stratégie x_i^1 *donne toujours* ***au moins autant*** *au joueur i que jouer* x_i^0.

On dit que la stratégie x_i^0 *est* ***dominée*** *par la stratégie* x_i^1 *pour le joueur i si et seulement si :*
$\forall x_1, \ldots x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots x_n,\ u_i(x_1, \ldots x_{i-1}, x_i^0, x_{i+1}, \ldots x_n) \leq u_i(x_1, \ldots x_{i-1}, x_i^1, x_{i+1}, \ldots x_n)$ *que l'on peut réécrire sous une forme plus lisible :* $\forall x_{-i},\ u_i(x_{-i}, x_i^0) \leq u_i(x_{-i}, x_i^1)$, ***avec une inégalité stricte au moins.***

Contre toute défense , jouer la stratégie x_i^1 *donne toujours* ***autant et au moins une fois plus*** *au joueur i que jouer* x_i^0.

On dit qu'une stratégie est dominante si elle domine toutes les autres. Si une stratégie dominante existe elle est évidemment unique, en effet si deux stratégies étaient simultanément dominantes elles donneraient les mêmes paiements au joueur, ce qui contredit l'existence d'une inégalité stricte au moins. En revanche, il peut parfaitement exister plusieurs stratégies faiblement dominantes. Il est clair que si un joueur possède une stratégie dominante il la jouera et le jeu sera résolu. En revanche la faible dominance peut ne pas déboucher...

Le jeu emblématique : dilemme du prisonnier (A est une stratégie dominante pour chacun)

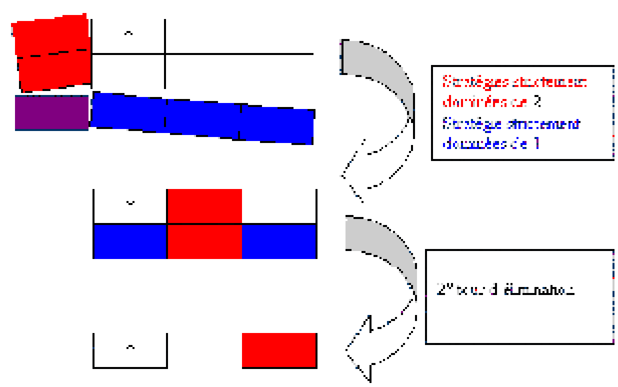
	A	P
A	0 0	2 -1
P	-1 2	1 1

Le renvoi d'ascenseur (toutes les stratégies sont faiblement dominantes, elles ne sont pourtant pas équivalentes!) :

	A	P
A	0 0	1 0
P	0 1	1 1

- Algorithme d'élimination des stratégies dominées

Une idée à première vue assez simple, consiste à remarquer qu'un joueur ne jouera certainement pas une stratégie strictement dominée. Cette remarque de bon sens va pourtant assez loin. Chaque joueur peut faire ce raisonnement et ainsi effacer de la forme normale les lignes et les colonnes qui correspondent à des stratégies strictement dominées. Mais une fois ce premier nettoyage réalisé, il est possible que des stratégies (non dominées initialement) le deviennent de sorte qu'un second nettoyage s'impose. Cet algorithme d'élimination successive peut être fait par chacun des joueurs.



L'élimination successive des stratégies strictement dominées ne dépend pas de l'ordre d'élimination, ni du fait que les joueurs éliminent de façon séquentielle ou simultanée. Elle converge vers un jeu réduit, qui est bien défini. Si c'est un singleton (une seule stratégie pour chacun) on a un candidat à un équilibre évident.

On peut concevoir le même raisonnement en éliminant les stratégies dominées (non strictement). Dans ce cas l'algorithme peut dépendre de l'ordre et de la manière dont les joueurs éliminent.

Chaque joueur doit donner un nombre entier entre 0 et 100, on calcule la moyenne, le gagnant est celui dont le pari est le plus proche de la **demi-moyenne**.

5 Equilibres de Nash

Evidemment, les concepts précédents peuvent ne rien donner. Si aucune stratégie n'est dominée, le problème reste entier. Un concept plus faible permet, dans un grand nombre de cas une résolution intéressante des jeux.

5.1 Meilleure réponse

Définition 9 *: correspondance de meilleure réponse*

On appelle correspondance de meilleure réponse du joueur i la correspondance qui à chaque vecteur de stratégies des autres joueurs associe les stratégies qui maximisent le paiement de i :

$$MR_i \ : \ x_{-i} \mapsto \arg\max_x u_i(x_{-i}, x)$$

Cette correspondance est bien définie dès lors que, par exemple l'ensemble des stratégies est fini, ou bien lorsque l'ensemble des stratégies est compact et la fonction u_i continue. C'est une fonction lorsque le maximum est unique. C'est le cas lorsque la fonction u_i est strictement concave.

Un équilibre de Nash est un point fixe de la correspondance de meilleure réponse :

5.2 Equilibre de Nash

Conjecture 10 ***Définition 11*** *Equilibre de Nash*
Définition 12 $x^* = (x_i^*)$ *est un équilibre de Nash si et seulement si :*

$$\forall i, \forall s \in X_i \ u_i(x_{-i}^*, x_i^*) \geq u_i(x_{-i}^*, s)$$

c'est-à-dire :

$$\forall i, \ x_i^* \in MR_i(x_{-i}^*)$$

Il est facile de voir qu'il existe des jeux pour lesquels il n'existe pas d'équilibre de Nash, d'autres où il en existe plusieurs.

- Pierre, ciseaux, feuille : Les ciseaux coupent la feuille qui emballe la pierre qui casse les ciseaux !

  Pas d'équilibre de Nash

	P	C	F
P	0 0	1 -1	-1 1
C	-1 1	0 0	1 -1
F	1 -1	-1 1	0 0

- Carrefour : deux voitures arrivent à une intersection, et il n'y a ni feu rouge ni règle de priorité...

  2 équilibres (Passe, Stop) et (Stop, Passe)

	P	S
P	-1 -1	2 1
S	1 2	0 0

- Bataille des sexes : Le mari et la femme doivent se retrouver au spectacle ce soir, mais ils ne savent pas si c'est au Théâtre ou à la Boxe, et ils ne peuvent communiquer !

  (2 équilibres !)

	T	B
T	3 2	1 1
B	1 1	2 3

Dans le dilemme du prisonnier (cf. plus haut) il existe un équilibre de Nash unique (c'est évidemment l'équilibre en stratégies dominantes). Cet équilibre est très peu efficace : une coordination sur (P,P) donne plus à chacun des joueurs.

5.3 Existence d'un équilibre de Nash

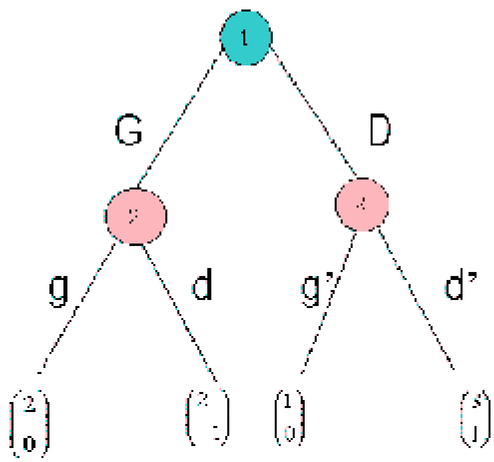
L'existence d'un équilibre de Nash dans un jeu est liée à l'existence d'un point fixe dans la correspondance de meilleure réponse. Les théorèmes de points fixes permettent ainsi de caractériser les situations dans lesquelles un équilibre existe. Le résultat le plus communément utilisé est le suivant :

Théoreme 13 *:Si les ensemble de stratégies sont des convexes, compacts, et si les fonctions de paiement sont quasi-concaves et continues, alors il existe un équilibre de Nash.*

Le théorème précédent permet d'assurer l'existence d'un équilibre de Nash si l'on autorise les stratégies mixtes dans les jeux finis. On dit qu'un joueur joue une stratégie mixte lorsqu'il tire au sort, selon une loi donnée, entre ses différentes stratégies, les paiements associés étant simplement les espérances de paiement. Si un joueur dispose de p stratégies, l'exemple des stratégies mixtes est l'ensemble des p-uplets de nombres positifs et inférieurs à 1 dont la somme est 1. Cet ensemble est un convexe compact. Dans le jeu Pierre Ciseaux Feuille, jouer avec une probabilité $\frac{1}{3}$ P, C et F est un équilibre de Nash.

6 Equilibre Parfait

Reprenons l'exemple 1, et cherchons les équilibres de Nash.



Les meilleures réponses sont les suivantes :

$gg' \to G \to \{gg', gd'\}$ $\quad dd' \to D \to \{dd', gd'\}$
$gd' \to D \to \{dd', gd'\}$ $\quad dg' \to G \to \{gg', gd'\}$

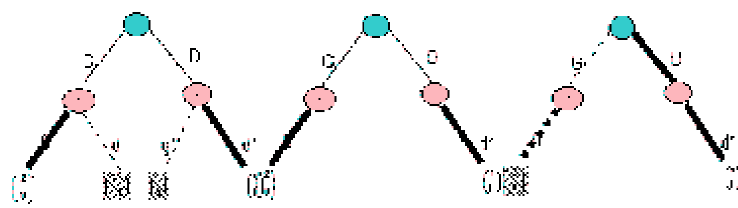
Il existe 2 équilibres de Nash : (gg', G) qui aboutit au paiement $(2, 0)$ et $(dd' \text{ ou } gd', D)$ qui aboutit à $(3, 1)$.

Le premier équilibre de Nash repose sur un comportement quelque peu surprenant : 2 joue gg' c'est-à-dire qu'il annonce qu'il jouera g' si 1 joue D. Ce qui n'est pas très rationnel puisque si 1 joue D, 2 a strictement intérêt à jouer d' ! Cet équilibre de Nash repose ainsi sur une **menace non crédible**. Comment faire pour éviter ce genre de résultat ? L'idée est simple, il faut demander que la stratégie soit **séquentiellement rationnelle** : elle doit prévoir un comportement optimal en tout point de l'arbre, c'est-à-dire même en dehors de la trajectoire qui sera jouée à l'équilibre : 1 peut raisonnablement anticiper que 2 jouera d' (et pas g') s'il joue D, et anticiper qu'il jouera g s'il joue G. Il en résulte qu'il doit comparer l'issue Gg' à Dd' et donc choisir de jouer D (ce qui correspond au second équilibre de Nash).

6.1 *Algorithme de Kühn dans un jeu à information parfaite*

Le raisonnement précédent peut être généralisé à tout jeu fini en information parfaite. L'algorithme est le suivant :

Plaçons nous en fin de jeu, en un nœud prédécesseur d'un nœud terminal. Imaginons que le déroulement du jeu conduise à ce point. On peut anticiper que le joueur en question, jouera de manière optimale et choisira l'action (on suppose ici qu'il n'y a pas d'indifférence pour simplifier) qui maximise son gain. On peut donc effacer les autres actions issues de ce nœud. Le comportement devient d'une certaine manière totalement prévisible et on peut remplacer le nœud en question par le nœud terminal (avec les paiements correspondants) associé à l'action optimale. On recommence la procédure d'analyse pour les autres nœuds qui précèdent immédiatement les nœuds terminaux. A chaque étape de l'algorithme, l'arbre est (strictement) réduit. Si l'on répète l'opération on débouche nécessairement sur le nœud initial. Le jeu est réduit à un problème de décision simple du premier joueur !



Définition 14 ***Définition 15*** *: équilibre parfait dans un jeu sous forme extensive en information parfaite.*

Le résultat de l'algorithme de Kühn est appelé équilibre parfait.

Remarquons qu'il existe toujours au moins un équilibre parfait pour ce type de jeu : l'algorithme de Kühn converge toujours.

Remarquons aussi qu'algorithme de Kühn et élimination des stratégies dominées sont deux procédures très similaires. On peut montrer facilement qu'un équilibre par élimination des stratégies dominées est un équilibre parfait. En revanche la réciproque n'est pas toujours vraie, il suffit pour s'en convaincre de remplacer le paiement 3 par le paiement 2 dans le jeu précédent : il existe alors deux équilibre parfaits (Dd', mais aussi Gg), alors que l'issue Gg ne peut être obtenue par élimination des stratégies dominées. En revanche les deux concepts coïncident dès lors qu'il n'y a pas d'indifférence (et donc pas d'ambiguïté dans l'algorithme de Kühn).

6.2 *Equilibre parfait en sous-jeux*

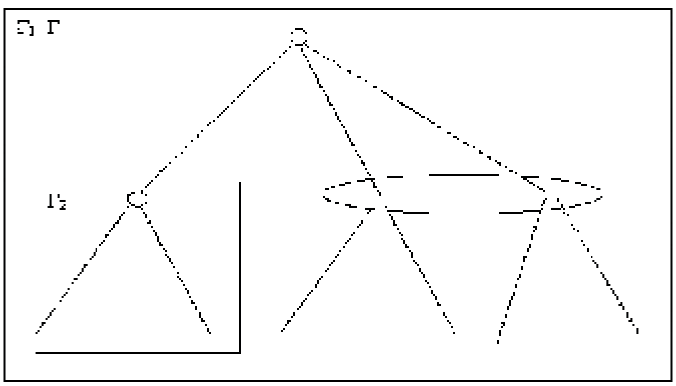
Le concept précédent peut être généralisé dans le cas de jeux sous forme extensive en information imparfaite.

L'idée est simple : l'algorithme de Kühn est fondée sur l'idée de cohérence interne : chaque joueur anticipe **pour toute suite possible** que les autres joueraient de **manière optimale** s'ils étaient conduits à cette séquence du jeu. Peut-on transposer cette idée à des jeux où il existe des ensembles d'information non réduits à des singletons ?

Définition 16 *: Sous-jeu*

On appelle sous-jeu d'un jeu donné, le jeu défini par un sous-arbre commençant en un ensemble d'information réduit à un singleton.

Exemple 17 *Exemple : deux sous-jeux (encadrés)*



Définition 18 *équilibre parfait en sous-jeux*

Un équilibre parfait en sous-jeux (ou Nash parfait) d'un jeu (sous forme extensive) est constitué de stratégies qui sont en équilibre de Nash dans tous les sous-jeux.

Remarque : Lorsqu'un sous-jeu est réduit à un jeu à 1 joueur, le concept d'équilibre de Nash est dégénéré, la stratégie doit simplement prévoir un comportement optimal.

Remarque : Le concept d'équilibre parfait en sous-jeux coïncide avec celui d'équilibre parfait lorsque le jeu est en information parfaite.

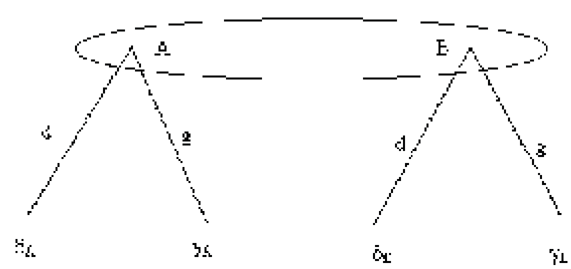
Exemple 19 *: jeu en deux étapes (information presque parfaite)*

Un jeu à deux joueurs, en deux étapes (ou périodes) se déroule de la manière suivante. Dans une première période chacun des deux joueurs choisit une stratégie K_i. Au début de la seconde étape chacun observe les choix opérés en première et doit choisir une action de deuxième étape x_i. Les paiements finaux sont $u_i(K_1, K_2, x_1, x_2)$.

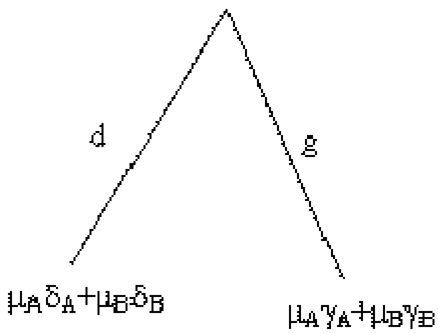
Pour chaque couple (K_1, K_2), on cherche les équilibres de Nash en x_1,x_2. Notons un équilibre de Nash de ce sous-jeu $x_1^*(K_1, K_2), x_2^*(K_1, K_2)$. Un équilibre de Nash parfait doit être tel que les stratégies de première période constituent un équilibre de Nash du jeu ayant les paiements $\hat{u}_i(K_1, K_2) \equiv u_i(K_1, K_2, x_1^*(K_1, K_2), x_2^*(K_1, K_2))$.

7 Equilibre Bayésien Parfait

Dans le concept précédent, un sous-jeu commence en un ensemble d'information singleton. Dans l'exemple de la définition, par exemple, il n'y a que deux sous jeux. En un ensemble d'information non réduit à un singleton, il n'est pas en général possible de mettre en œuvre l'algorithme de Kühn (sauf, s'il existe une stratégie dominante...). Prenons l'exemple suivant (on ne mentionne que les paiements du joueur en question):



Evidemment, si $\delta_A > \gamma_A$ et $\delta_B > \gamma_B$ (ou $\delta_A < \gamma_A$ et $\delta_A < \gamma_A$) le problème du joueur est trivial. En revanche on ne peut rien dire lorsque on a par exemple $\delta_A > \gamma_A$ et $\delta_B < \gamma_B$, sauf si l'on fait une hypothèse sur les probabilités respectives des nœuds A et B. S'il y a de grandes chances d'être en A, le joueur jouera d. On voit ainsi que l'on peut généraliser l'algorithme de Kühn à condition d'affecter des probabilités aux nœuds des ensembles d'information et de remplacer les gains par les espérances de gain associées. On appelle croyances ces probabilités. A croyances données μ_A et $\mu_B = 1 - \mu_A$, on peut remplacer le morceau d'arbre précédent par :



Si l'on opère de la même façon pour tous les ensembles d'information, on peut mettre en œuvre l'algorithme de Kühn et déboucher sur un équilibre !

Evidemment l'équilibre trouvé dépend des croyances. A croyance donnée on a un équilibre :

$$\mu \to eq(\mu)$$

Cet équilibre donne les stratégies que doivent suivre les joueurs. Si ces stratégies sont incohérentes avec les croyances alors on n'est pas à l'équilibre ! Par exemple si supposer que $\mu_A = 1$ conduit à des stratégies d'équilibre telles que le nœud B a une probabilité 1 d'être atteint, on est dans une situation incohérente.

Autrement dit, si l'on se donne des stratégies, (éventuellement mixtes) on peut calculer les probabilités (associées à ces stratégies) des nœuds de l'arbre sur la trajectoire induite par les stratégies . Pour les autres nœuds on peut affecter n'importe quelle probabilité.

$$x \to \hat{\mu}(x)$$

Définition 20 *: équilibre Bayésien Parfait*

(x^*, μ^*) est un équilibre Bayésien parfait si : $\mu^* \in \hat{\mu}(eq(\mu^*))$ et $x^* \in eq(\hat{\mu}(x^*))$.